20/11/2019

• Αλλαγή Μεταβλητών Μονοδιάστατη Περίπτωση

Έστω X τ.μ. με γνωστή κατανομή. Ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της κατανομής της $Y=g(X)$ όπου g μία πραγματική συνάρτηση

• 1η Μέθοδος

Μέθοδος της Α.Σ.Κ.

$$F_Y(y)=P(g(X)\le y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{g(x)\le y} p_X(x), & X \text{ διακριτή}\\[2ex] \displaystyle\int_{g(x)\le y} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής}\end{cases}$$

• 2η Μέθοδος

Μέθοδος του Μετασχηματισμού

Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$. Έστω I το σύνολο των δυνατών τιμών και $Y=g(X)$ ένας μετασχηματισμός αυτής.

Υποθέτουμε ότι:

1) ο μετασχηματισμός είναι 1-1 συνάρτηση του X από το I στο $g(I)$ με $g(I)=\{y : g(x)=y\}$

2) $\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$ είναι συνεχής με $\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\neq 0$

Τότε $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \quad \forall\, y\in g(I)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ !!!

Η προηγούμενη πρόταση ισχύει υπό την υπόθεση ότι ο μετασχηματισμός είναι "1-1" στο σύνολο των δυνατών τιμών της.

Αν δεν είναι "1-1" στο I αλλά υπάρχει μια διαμέριση του I $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ τώ ο μετασχηματισμός $Y = g(x)$ να είναι τμηματικά "1-1" τότε το:

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(g_j(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

• 3η Μέθοδος

Μέθοδος της Ροπογεννήτριας

Προσδιορίζω την $m_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{tg(x)})$ και αν είναι ροπογεννήτρια γνωστής κατανομής έχω προσδιορίσει λόγω του μονοσήμαντου την κατανομή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$

i) ν.β. η κατανομή του $Y = X^2$. Ειδική περίπτωση για $X \sim N(0,1)$

ii) ν.β. η κατανομή του $Y = |X|$. Ειδική περίπτωση για $X \sim U(-1,1)$

iii) ν.β. η κατανομή του $Y = F_X(x)$

iv) αν $X \sim U(0,1)$ να προσδιοριστεί η κατανομή του $Y = X^n$

ΛΥΣΗ

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2}y^{-1/2} + f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2}y^{-1/2}$$

$X \sim N(0,1)$

$f_X(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad x \in \mathbb{R}$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} \quad , y \in \mathbb{R}$

ii) $Y = |X|$

$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y) \quad y \in \mathbb{R}$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(y) - F_X(-y)) = f_X(y)(y)' - f_X(-y)(-y)'$

$= f_X(y) + f_X(-y) \quad y \in \mathbb{R}$

$X \sim U(-1,1)$

$f_X(x) = \frac{1}{2} \quad -1 \leq x \leq 1$

iii) $Y = F_X(X)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) \Big\} = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$

$P(X \leq a) = F_X(a)$ $\quad 0 < y < 1$

$f_Y(y) = 1 \quad Y \sim U(0,1)$

iv) $Y = X^n \quad X \sim U(0,1)$

μπορώ να το γράψω έτσι γιατί ξέρω ότι το $x \in (0,1)$

$F_Y(y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n}) \quad , y \in (0,1)$

$f_Y(y) = f_X(y^{1/n})(y^{1/n})' = f_X(y^{1/n})\frac{1}{n}y^{1/n-1}$ $\quad y\in(0,1)$

$f_X(x)=1 \quad 0<x<1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $X\sim$ Βήτα(α,β) , $f_X(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$ $\quad 0<x<1$

$Y=-\ln X$

ΛΥΣΗ

Με την 1η μέθοδο

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\ln X\le y)=P(\ln X\ge -y)=P(X\ge e^{-y})=$

$=1-F_X(e^{-y}) \Rightarrow F_Y(y)=1-F_X(e^{-y})$

$f_Y(y)=-f_X(e^{-y})(e^{-y})' = e^{-y}f_X(e^{-y})$

$f_Y(y)=\dfrac{e^{-y(\alpha-1)}(1-e^{-y})^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}e^{-y}$ $\quad , y\ge 0$

Με την 2η μέθοδο

$Y=-\ln X \Rightarrow \ln X=-Y \Rightarrow X=e^{-Y}$

Ο μετασχηματισμός είναι "1-1" στο $I=\{x: x\in(0,1)\}$ με
$g(I)=\{y: y\in(0,+\infty)\}$

$f_Y(y)=f_X(e^{-y})\left|\frac{d}{dy}e^{-y}\right| = f_X(e^{-y})e^{-y}$ $\quad y\in(0,+\infty)$

Παραδειγμα

Έστω X τ.μ. με σ.π.π $f_X(x) = \frac{x+1}{2}$ $\quad -1 \leq x \leq 1$

να προσδιοριστεί η σ.π.π $Y = X^2$.

Λυση

$Y = X^2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{Y}$ άρα ο μετ/σμός δεν είναι "1-1" στο $I = \{x : x \in [-1,1]\}$.

Όμως αν θεωρήσω τη διαμέριση $I = [-1,0] \cup (0,1]$ τότε ο μετ/σμός είναι κομματιαστά "1-1"

$x = \sqrt{y}$ για $x \in (0,1]$

$x = -\sqrt{y}$ για $x \in [-1,0]$

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) \right| + f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) \right|$$

$$= \frac{-\sqrt{y}+1}{2} \frac{1}{2} y^{-1/2} + \frac{\sqrt{y}+1}{2} \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad 0 < y < 1$$

• Αλλαγη Μεταβλητων Πολυδιαστατη Περιπτωση

Υποθέτουμε ότι δίνεται η από κοινού κατανομή ή το πλήθος τ.μ $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Θέλουμε να βρούμε την από κοινού κατανομή ή το πλήθος συναρτήσεων των τ.μ. $Y_1 = h_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, Y_k = h_k(X_1, \ldots X_n)$

1η Μέθοδος - Α.Σ.Κ

$F_Y(y_1, \ldots, y_k)$ με $Y = (Y_1, \ldots, Y_k)^T$

Από ισοδυναμία με τον προσδιορισμό

$$P(h_1(\underset{\sim}{x}) \le y_1, h_2(\underset{\sim}{x}) \le y_2, \dots, h_k(\underset{\sim}{x}) \le y_k) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{h_1(\underset{\sim}{x}) \le y_1, \dots, h_k(\underset{\sim}{x}) \le y_k} \cdots \sum P_{\underset{\sim}{x}}(x_1, x_2, \dots x_n) & , x \text{ διακριτό} \\ \\ \displaystyle\int \cdots \int f_{\underset{\sim}{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n & , x \text{ συνεχής} \end{cases}$$

2η Μέθοδος - Ροπογεννητριών

Προσδιορίζω την ροπογεν. του $Y = (h_1(\underset{\sim}{x}), h_2(\underset{\sim}{x}), \dots, h_k(\underset{\sim}{x}))'$

$m_Y(t) = E(e^{t'Y}) = E(e^{t'h(\underset{\sim}{x})})$ όπου $h(\underset{\sim}{x}) = (h_1(\underset{\sim}{x}), \dots, h_k(\underset{\sim}{x}))$

Δηλ. η $m_Y(t) = \begin{cases} \sum e^{t'h(\underset{\sim}{x})} P_x(x) & , x \text{ διακριτή} \\ \\ \int e^{t'h(\underset{\sim}{x})} f_x(x)\, dx & , x \text{ συνεχής} \end{cases}$

Αν η ροπογ. είναι γνωστής κατανομής έχουμε προσδιορίσει την κατανομή.

3η Μέθοδος - Μετασχηματισμού

Έστω $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ συνεχές τυχαίο διάνυσμα με από κοινού σ.π.π. $f_{\underset{\sim}{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\underset{\sim}{x}}(\underset{\sim}{x})$ και $Y = (Y_1, \dots, Y_n) =$

$= (g_1(\underset{\sim}{x}), g_2(\underset{\sim}{x}), \dots, g_n(\underset{\sim}{x}))$ ένας μετασχηματισμός. Έστω

$S = \{x : f_{\underset{\sim}{x}}(x) > 0\}$ και $T = \{y : y_i = g_i(\underset{\sim}{x}), x \in S\}$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση του $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ τ.ω $\forall S_\ell$, $\ell = 1, \dots, m$ το σύστημα

$y_1 = g_1(\underset{\sim}{x})$, $y_2 = g_2(\underset{\sim}{x})$, …, $y_n = g_n(\underset{\sim}{x})$ να έχει μοναδική λύση

$x_1^* = g_{1\ell}^*(y_1, \dots, y_n)$, $x_2^* = g_{2\ell}^*(y_1, \dots, y_n)$, …, $x_n^* = g_{n\ell}^*(y_1, \dots, y_n)$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι $y_1 = g_1(\underset{\sim}{x})$, $y_2 = g_2(\underset{\sim}{x})$, …, $y_n = g_n(\underset{\sim}{x})$ είναι "1-1" συναρτήσεις του S_ℓ στο T.

Υποθέτουμε ότι $g_{1\ell}^*, g_{2\ell}^*, \dots, g_{n\ell}^*$ έχουν όλες τις μερικές παρ/γους 1ης τάξης και αυτές είναι συνεχείς τότε συμβολίζουμε με:

$$J_\ell = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{1\ell}^*}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{1\ell}^*}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n\ell}^*}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n\ell}^*}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad \text{με } J_\ell \neq 0$$

$$f_Y(y) = \sum_\ell f_X(g_{1\ell}^*, \dots, g_{n\ell}^*) \, |J_\ell|$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με $Exp(\lambda)$. Να προσδιοριστεί η $U = \frac{X}{X+Y}$

ΛΥΣΗ

$$f_{XY}(x,y) \underset{\text{ανεξαρ.}}{=} f_X(x) f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , x \geq 0, \ y \geq 0$$

$u = \frac{x}{x+y}$

Θα πρέπει να βρω και άλλη μία γιατί έχω δύο μεταβλητές

$v = x$

$$\left.\begin{matrix} u = \frac{x}{x+y} \\ \\ v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y = \frac{x}{u} = \frac{v}{u} \\ \\ v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = v \\ \\ y = \frac{v}{u} - v \end{matrix}$$

$S = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$T = \{(u,v) : v \geq 0,\ \frac{v}{u} - v \geq 0\} = \{(u,v) : v \geq 0,\ v\left(\frac{1-u}{u}\right) \geq 0\}$

$= \{(u,v) : v \geq 0,\ \frac{1-u}{u} \geq 0\} = \{(u,v) : v \geq 0,\ 1-u \geq 0\}$

$= \{(u,v) : v \geq 0,\ u \in (0,1]\}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{u} - 1 & -\frac{v}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{v}{u^2} \neq 0$$

$f_{uv}(u,v) = f_{xy}\left(v, \frac{v}{u} - v\right)\left|-\frac{v}{u^2}\right| = \lambda^2 e^{-\lambda\left(\frac{u}{v}\right)} \frac{v}{u^2}, \quad (u,v) \in T$

$f_u(u) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \frac{v}{u}} \frac{v}{u^2}\, dv = \frac{\lambda}{u} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{u} v e^{-\frac{\lambda}{u} v}\, dv = \frac{\lambda}{u} \quad 0 < u < 1$

$f_u(u) = \frac{\lambda}{u}, \quad 0 < u < 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

X,Y συνεχείς τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f_{XY}(x,y)$
νδο $U=X+Y$, $V=X-Y$ η σ.π.π. δίνεται από αυτή τη σχέση
$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, $(u,v)\in T$ επιπλέον η $f_{XY}(x,y)=1$
$0<x<1$ $0<y<1$ να προσδ. $f_U(u)$, $f_V(v)$

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned} U &= X+Y \\ V &= X-Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} \\ y &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}\right.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2} \quad (u,v)\in T$$

$$S = \{(x,y) : (0<X<1), (0<Y<1)\}$$

$$T = \left\{(u,v) : 0 < \frac{u+v}{2} < 1 \ , \ 0 < \frac{u-v}{2} < 1\right\}$$

$$= \{(u,v) : 0 < u+v < 2 \ , \ 0 < u-v < 2\}$$

$0 \le u \le 2$ (εκτ οριακού) $-1 < v < 1$ (εκτ οριακού)

$f_U(u) = \int f_{UV}(u,v)\, dv$

Πως διέφοραι: $0 < u+v < 2 \Rightarrow -u < v < 2-u$

$0 < u-v < 2 \Rightarrow u-2 < v < u$

$-1 \leq v \leq 1$

$\max\{-u, u-2, -1\} < v < \min\{2-u, u, 1\}$ όταν $0 < u < 2$

Διακρίνω Περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: $0 < u < 1$

$f_U(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\, dv$

2η Περίπτωση: $1 < u < 2$

$f_U(u) = \int_{u-2}^{2-u} \frac{1}{2}\, dv$

$f_V(v) = \int f_{UV}(u,v)\, du$

$0 < u+v < 2 \Rightarrow -v < u < 2-v$

$0 < u-v < 2 \Rightarrow v < u < 2+v$

$0 \leq u \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u \leq 2$

$\max\{-v, v, 0\} < u < \min\{2-v, 2+v, 2\}$

Δεν ξέχνω $-1 \leq v < 1$

Παίρνω Περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: $-1 \le v < 0$

$$\int_{-v}^{2-v} f_{U,V}(u,v)\, du$$

2η Περίπτωση: $0 \le v \le 1$

$$\int_{v}^{2+v} f_{U,V}(u,v)\, du$$

ΑΣΚΗΣΗ (Η.ω)

X, Y, Z ανεξάρτητες με $Exp(1)$

$U = X+Y$, $V = Y+Z$, $W = Z+X$

να βρεθεί $f_{XYZ}(x,y,z)$